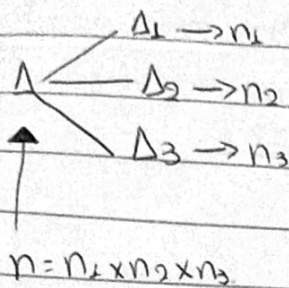
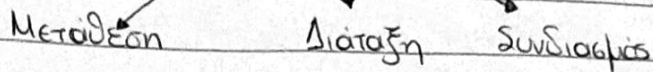


08/10/2015

Πολλαπλή Αρχή



Πολλαπλή Αρχή



Μετάθεση: Έστω  $n$  διακευφιμένα (διαφορετικά  $\neq$  προς  $\neq$ ) στοιχεία ή αντικείμενα. Ονομάζουμε μετάθεση των  $n$  διαφορετικών στοιχείων κάθε δυνατή τοποθέτηση των  $n$  στοιχείων σε ευθεία γραμμή σε σειρά (με συγκεκριμένη τάξη).

Παράδειγμα: A, B, Γ

B, A, Γ - Γ, A, B - Γ, B, A - A, Γ, B - B, Γ, A - A, B, Γ

Διάταξη (περιλαμβάνει την έννοια της μετάθεσης): Έστω  $n$ -διακευφιμένα στοιχεία. Ονομάζουμε διάταξη  $n$  ανά  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) κάθε δυνατή επιλογή  $k$  από τα  $n$  στοιχεία και τοποθέτηση των  $k$  στοιχείων σε ευθεία γραμμή σε σειρά.

Παράδειγμα: Διατάξεις 3 ανά 2 των A, B, Γ. (Από τα 3 να διαλέξω τα 2 και αυτά τα 2 που διάλεξα να τα τοποθετήσω)

A, B - B, A - B, Γ - Γ, B - A, Γ - Γ, A (αυτές είναι οι δυνατές διατάξεις 3 ανά 2)

Συνδιαγμός (περιέχεται στην έννοια της διατάξης): Έστω  $n$  διακευφιμένα στοιχεία. Ονομάζουμε συνδιαγμό  $n$  ανά  $k$  ( $n, k \in \mathbb{N}$ ) ( $1 \leq k \leq n$ ) κάθε δυνατή επιλογή  $k$  από τα  $n$  στοιχεία χωρίς να ενδιαφέρει η τοποθέτηση των  $k$  στοιχείων σε ευθεία γραμμή σε σειρά με άλλα λόγια χωρίς να με ενδιαφέρει να μεταθέσω)

Παράδειγμα: Συνδιαγμοί 3 ανά 2 των A, B, Γ A, B - B, Γ - A, Γ - ~~B, A~~ - ~~Γ, A~~

Παρατήρηση: Η διατάξη είναι γενικότερη έννοια και αποτελείται από συνδιασμό και μεταθέση. ΔΙΑΤΑΞΗ  $\equiv$  ΣΥΝΔΙΑΣΜΟΣ και ΜΕΤΑΘΕΣΗ.

Παρο είναι το πλήθος των μεταθέσεων των διατάξεων και των συνδιασμών;  
 Πρόταση: α) Το πλήθος των διατάξεων η διατεταγμένων στοιχείων ανά  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) συμβολίζεται  $(n)_k$  και είναι  $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$  ( $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ )  $0! \stackrel{\text{ορ}}{=} 1$

Παρατήρηση: Αν  $n=n$  η διατάξη η ανά  $k \equiv$  μεταθέση

β) Το πλήθος των μεταθέσεων η διατεταγμένων στοιχείων είναι  $n!$

γ) Το πλήθος των συνδιασμών η διατεταγμένων στοιχείων ανά  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) συμβολίζεται με  $\binom{n}{k}$  και είναι  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Απόδειξη α) 1<sup>ο</sup> από τα  $n$  κατοποθετώ  $\rightarrow n$  τρόποι

2<sup>ο</sup> από τα  $n-1$  και τοποθετώ  $\rightarrow n-1$  τρόποι

3<sup>ο</sup> -||- -||- -||-  $\rightarrow n-2$  τρόποι

⋮

$k$ <sup>ο</sup> -||- -||- -||-  $\rightarrow n-(k-1)$  τρόποι  
 $= n-k+1$

Με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή  
 $(n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1))$   
 Αφαιρεί ο δ.ο.  
 $\rightarrow = \frac{n!}{(n-k)!}$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-k)}$$

Απόδειξη β) Προκύπτει απ' το α αν για  $n=k$ .

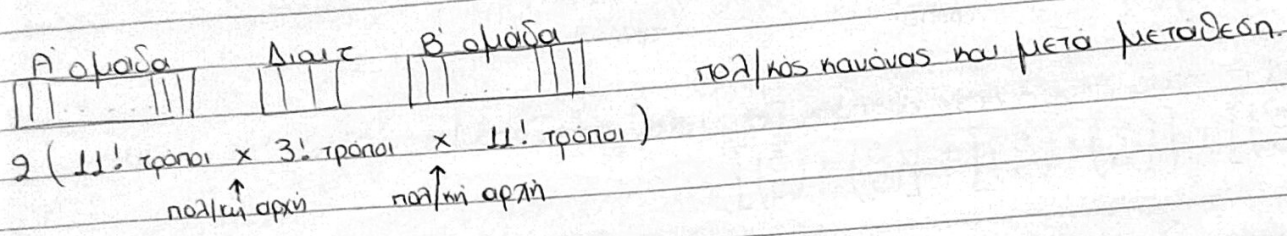
Απόδειξη γ) Διατάξη  $\equiv$  συνδιασμός και μεταθέση

↑ πολλαπλασιαστική Αρχή:  $(n)_k = \binom{n}{k} \times k! \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

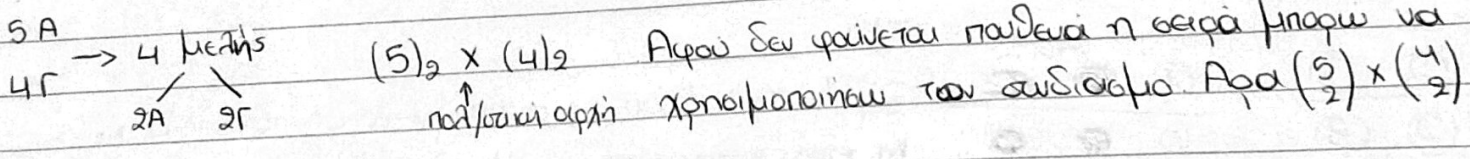
Παρατήρηση  
 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$   
 Εμφανίζεται στο διωνύμιο του Νεύτωνα

Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>  
 Με πόσους τρόπους μπορούν 8 δρόμοι να τοποθετηθούν στην οφειλόμενη, (δίνω πόσες μεταθέσεις των 8 έχουμε;) Θα έχουμε  $8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$

Παράδειγμα 2<sup>ο</sup>  
 Οι αρχικές 11 ομάδες των 2 ομάδων και οι 3 διακεντρες πηγαίνουν να φωτογραφηθούν πριν τον αγώνα σε μια σειρά σε μια γραμμή. Πόσες είναι οι δυνατότες φωτογράφισης αν οι διακεντρες παρεμβάλλονται μεταξύ των ομάδων;

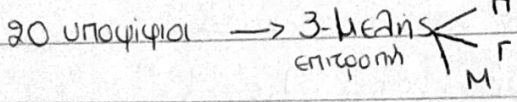


Παράδειγμα 3<sup>ο</sup>  
 Πόσες 4-μελεις επιτροπές είναι δυνατό να σχηματιστούν από 5 άντρες και 4 γυναίκες αν στην επιτροπή πρέπει να συμμετέχουν υποχρεωτικά 2 άντρες και 2 γυναίκες;



Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί μια 3-μελής επιτροπή αν υπάρχει πρόεδρος, γραμματέας και μέλος αν υπάρχουν 20 υποψήφιοι γι' αυτό

Εδώ επειδή έχουμε 3 διαφορετικά αξιώματα θα έχουμε μετάθεση άρα  $(20)_3 = \frac{20!}{17!}$



Παράδειγμα 49

Φοιτητής πρέπει να απαντήσει σε 7 από 10 ερωτήσεις

α) Πώς επιλογές έχει,

β) Πώς επιλογές έχει αν πρέπει να απαντήσει σε τουλάχιστον 3 από τις 5 πρώτες,

α) $\frac{10!}{7!3!}$	β) $\frac{10}{10} \frac{9}{9} \frac{8}{8} \frac{7}{7} \frac{6}{6} \frac{5}{5} \frac{4}{4} \frac{3}{3} \frac{2}{2} \frac{1}{1}$
↑ συνδυασμός	Περίπτωσης
	1 <sup>η</sup> 3 από τις 5
	2 <sup>η</sup> 4 από τις 5
	3 <sup>η</sup> 5 από τις 5
	κ' 4 από τις άλλες 5
	κ 3 από τις άλλες 5
	κ 2 από τις άλλες 5
1 <sup>η</sup> $\binom{5}{3} \times \binom{5}{4}$	2 <sup>η</sup> $\binom{5}{4} \times \binom{5}{3}$
τρόποι	τρόποι
	3 <sup>η</sup> $\binom{5}{5} \times \binom{5}{2}$
	τρόποι

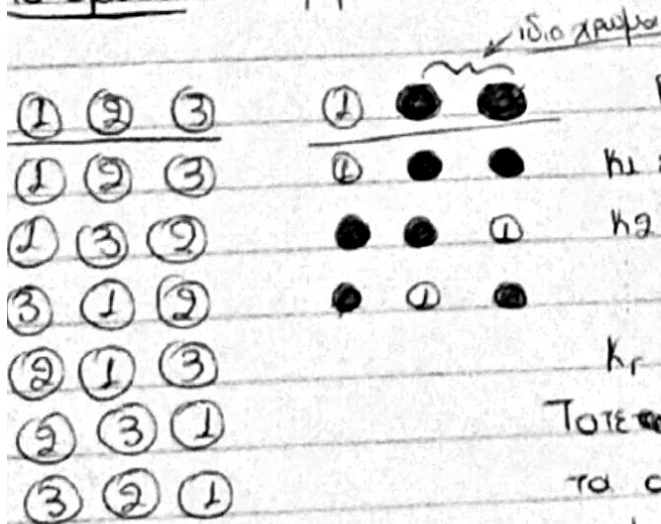
Για να βρούμε τους συνολικούς τρόπους θα τους προσέσουμε δηλαδή θα έχουμε

$$\left[ \binom{5}{3} \times \binom{5}{4} \right] + \left[ \binom{5}{4} \times \binom{5}{3} \right] + \left[ \binom{5}{5} \times \binom{5}{2} \right]$$

Πολυωνυμικός Συντελεστής

(Γενικεύει την έννοια της μεταθέσης)

Ο πολυωνυμικός συντελεστής ενδιαφέρεται στην τοποθέτηση σε σειρά σε γραμμή τα ομάδων διαφορετικών στοιχείων.



Πρόταση: Έστω η αντιστροφή απ' τα οποία  $k_1$

$k_2$  είναι καμπύριος ή ομάδες 1

$k_3$  —||— ή —||— 2

...

$k_r$  —||— ή —||— r

Τότε τα πλήθος των τρόπων με τους οποίους τα αντιστρέφονται μπορούν να τοποθετηθούν σε γραμμή συμβολίζεται με  $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r}$  και είναι:

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$$

Παρατήρηση

α)  $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r}$  ← πολλαπλασιασμός συντελεστών

αντάλλαγμα: γενίκευση του διωνύμου του Νεύτωνα  $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^n = \sum_{\{k_1, k_2, \dots, k_r, n\}} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r}$

β)  $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} = \binom{n}{k_1} \times \binom{n-k_1}{k_2} \times \dots \times \binom{n-k_1-\dots-k_{r-2}}{k_{r-1}} \times \binom{n-k_1-\dots-k_{r-1}}{k_r}$

2<sup>ο</sup> χρήση πολ. συντελεστών. Απαριθμεί συνολο τρόπων μεταξύ ένα συνολο n στοιχείων διαφερίζεται σε r ομάδες των k<sub>1</sub>, ..., k<sub>r</sub> στοιχείων η υαδερμα

Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>

Πόσες διαφορετικές λέξεις μπορούν να σχηματιστούν από αναμετάθεση των γραμμάτων της

λέξης ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ  $\binom{10}{1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1} = \frac{10!}{2!2!}$

Παράδειγμα 2<sup>ο</sup>

8 στρατιώτες πρέπει να τοποθετηθούν σε 4 φυλάκια. Πόσοι τρόποι τοποθέτησης υπάρχουν

α) Αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός σχετικά με τον αριθμό των στρατιωτών που θα τοποθετηθούν σε κάθε φυλάκιο

β) Αν σε κάθε φυλάκιο πρέπει να τοποθετηθούν 2 στρατιώτες,

- α) 1ος → 4 τρόποι
  - 2ος → 4 τρόποι
  - 3ος → 4 τρόποι
  - 4ος → 4 τρόποι
  - ...
  - 8ος → 4 τρόποι
- με πολλαπλή αρχή  $4^8$

β)  $\binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}$  τρόποι