08/10/2015

Πολ/στική Αρχή

$\Delta \to \Delta_1 \to n_1$

$\Delta \to \Delta_2 \to n_2$

$\Delta \to \Delta_3 \to n_3$

$n = n_1 \times n_2 \times n_3$

Πολ/στική Αρχή → Μετάθεση, Διάταξη, Συνδυασμός.

<u>Μετάθεση</u>: Εστω n διακεκριμένα (διαφορετικά 1 προς 1) στοιχεία ή αντικείμενα. Ονομάζουμε μετάθεση των n διαφορετικών στοιχείων κάθε δυνατή τοποθέτηση των n στοιχείων σε ευθεία γραμμή σε σειρά (με συγκεκριμένη τάξη)

Παράδειγμα A,B,Γ

B,A,Γ - Γ,A,B, - Γ,B,A - A,Γ,B, - BΓ,A - A,B,Γ

Διάταξη (περιλαμβάνει την έννοια της μετάθεσης). Εστω n-διακεκριμένα στοιχεία. Ονομάζουμε διάταξη n ανά κ ($1<\kappa<n$) κάθε δυνατή επιλογή κ από τα n στοιχεία και τοποθέτηση των κ στοιχείων σε ευθεία γραμμή σε σειρά

Παράδειγμα Διατάξεις 3 ανά 2 των A,B,Γ (Από τα 3 να διαλέξω τα 2 και αυτά τα 2 που διάλεξα να τα τοποθετήσω)

A,B - B,A - B,Γ - Γ,B - A,Γ - Γ,A (αυτές είναι οι δυνατές διατάξεις 3 ανά 2)

Συνδυασμός (περιέχεται στην έννοια της διάταξης) Εστω n διακεκριμένα στοιχεία. Ονομάζουμε συνδυασμό n ανά κ ($n,\kappa \in \mathbb{N}$) ($1 \le \kappa \le n$) κάθε δυνατή επιλογή κ από τα n στοιχεία (χωρίς να ενδιαφέρει η τοποθέτηση των κ στοιχείων σε ευθεία γραμμή σε σειρά με άλλα λόγια χωρίς να με ενδιαφέρει να μεταθέσω)

Παράδειγμα Συνδυασμοί 3 ανά 2 των A,B,Γ A,B - BΓ - A,Γ - ~~B,A~~ - ~~Γ,B~~, ~~Γ,A~~

Παρατήρηση: Η διάταξη είναι γενικότερη έννοια και αποτελείται από συνδυασμό και μετάθεση. ΔΙΑΤΑΞΗ ≡ ΣΥΝΔΙΑΣΜΟ και ΜΕΤΑΘΕΣΗ.

Ποιο είναι το πλήθος των μεταθέσεων των διατάξεων και των συνδιασμών;

Πρόταση: α) το πλήθος των διατάξεων n διακεκριμένων στοιχείων ανά k $(1 \le k \le n)$ συμβολίζεται $(n)_k$ και είναι $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ $(n! = 1 \times 2 \times \dots \times n)$ $0! \overset{\text{ορ}}{=} 1$

Παρατήρηση: Αν $n=n$ η διάταξη n ανά k ≡ μετάθεση

β) Το πλήθος των μεταθέσεων n διακεκριμένων στοιχείων είναι $n!$

γ) Το πλήθος των συνδιασμών n διακεκριμένων στοιχείων ανά k $(1 \le k \le n)$ συμβολίζεται με $\binom{n}{k}$ και είναι $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Απόδειξη α) 1ο από τα n καυτοποθετώ → n τρόποι
2ο από τα n και τοποθετώ → $n-1$ τρόπα
3ο -//- -//- -//- → $n-2$ τρόποι
⋮
κο -//- -//- -//- → $n-(k-1)$ τρόποι $= n-k+1$

Με βάση την πολ/κή αρχή $n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)$
Αρκεί ν.δ.ο. $= \frac{n!}{(n-k)!}$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-(k+1))(n-k)(n-(k-1))\, n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-k)} = n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)$$

Απόδειξη β) Προκύπτει απ' το α αν για $n=k$.

Απόδειξη γ) Διάταξη = συνδιασμός και μετάθεση

πολ/κή Αρχή: $(n)_k = \binom{n}{k} \times k!$ $\Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} \overset{\alpha}{=} \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Παρατήρηση

$\binom{n}{k}$ ← διωνυμικός συντελεστής εμφανίζεται στο διώνυμο του Νεύτωνα $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Παράδειγμα 1º

Με πόσους τρόπους μπορούν 8 δρομείς να τοποθετηθούν στην αφετηρία; (δηλ πόσες μεταθέσεις των 8 έχουμε;) Θα έχουμε $8! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8$

Παράδειγμα 2º

Οι αρχικές 11άδες των 2 ομάδων και οι 3 διαιτητές πρόκειται να φωτογραφηθούν πριν τον αγώνα σε μια σειρά σε μια γραμμή. Πόσες είναι οι δυνατές φωτογραφίες αν οι διαιτητές παρεμβάλλονται μεταξύ των ομάδων;

Α' ομάδα | Διαιτ | Β' ομάδα

πολ/κός κανόνας και μετά μετάθεση.

$2\,(11!$ τρόποι $\times\ 3!$ τρόποι $\times\ 11!$ τρόποι$)$

πολ/κή αρχή   πολ/κή αρχή

Παράδειγμα 3º

Πόσες 4-μελής επιτροπές είναι δυνατό να σχηματιστούν από 5 άντρες και 4 γυναίκες, αν στην επιτροπή πρέπει να συμμετέχουν υποχρεωτικά 2 άντρες και 2 γυναίκες;

5Α → 4 μελής (2Α, 2Γ)
4Γ

$(5)_2 \times (4)_2$ Αφού δεν φαίνεται πουθενά η σειρά μπορώ να χρησιμοποιήσω τον συνδυασμό. Άρα $\binom{5}{2} \times \binom{4}{2}$

πολ/στική αρχή

Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί μία 3μελής επιτροπή αν υπάρχει πρόεδρος, γραμματέας και μέλος αν υπάρχουν 20 υποψήφιοι γι'αυτό

Εδώ επειδή έχουμε 3 διαφορετικά αξιώματα θα έχουμε μετάθεση άρα $(20)_3 = \frac{20!}{17!}$

20 υποψήφιοι → 3-μελής επιτροπή (Π, Γ, Μ)

Παράδειγμα 4ο

Φοιτητής πρέπει να απαντήσει σε 7 από 10 ερωτήσεις

α) Πόσες επιλογές έχει;

β) Πόσες επιλογές έχει αν πρέπει να απαντήσει σε τουλάχιστον 3 από τις 5 πρώτες;

α) $\frac{10!}{7!\,3!}$

συνδυασμός

β) 1ο 2ο 3ο 4ο 5ο | 6ο 7ο 8ο 9ο 10ο

Περιπτώσεις

τουλάχιστον

1η 3 από τις 5 κ' 4 από τις άλλες 5

ή

2η 4 από τις 5 κ 3 από τις άλλες 5

ή

3η 5 από τις 5 κ 2 από τις άλλες 5

1η $\binom{5}{3}\times\binom{5}{4}$ τρόποι ή 2η $\binom{5}{4}\times\binom{5}{3}$ τρόποι ή 3η $\binom{5}{5}\times\binom{5}{2}$ τρόποι

Για να βρούμε τους συνολικούς τρόπους θα τους προσθέσουμε δηλαδή θα έχουμε

$$\left[\binom{5}{3}\times\binom{5}{4}\right]+\left[\binom{5}{4}\times\binom{5}{3}\right]+\left[\binom{5}{5}\times\binom{5}{2}\right]$$

Πολυωνυμικός Συντελεστής

(Γενικεύει την έννοια της μετάθεσης)

Ο πολυωνυμικός συντελεστής ενδιαφέρεται στην τοποθέτηση σε σειρά σε γραμμή τα ομάδων διαφορετικών στοιχείων.

ίδιο χρώμα

1	2	3		1	●	●
1	2	3		1	●	●
1	3	2		●	●	1
3	1	2		●	1	●
2	1	3				
2	3	1				
3	2	1				

Πρόταση: Έστω n αντικείμενα απ' τα οποία k_1 είναι κατηγορίας ή Ομάδας 1

k_2 —//— ή —//— 2

⋮

k_r —//— ή —//— r

Τότε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους τα αντικείμενα μπορούν να τοποθετηθούν σε γραμμή σε σειρά συμβολίζεται με $\binom{n}{k_1,k_2,\dots,k_r}$ και είναι:

$$\binom{n}{k_1,k_2,\dots,k_r}=\frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_r!}$$

Παρατήρηση

α) $\binom{n}{k_1\, k_2\, \dots\, k_r}$ ← πολυωνυμικός συντελεστής

αναπτυγμα: γενίκευση του διωνύμου του Νεύτωνα $(x_1+x_2+\dots+x_n)^n = \sum_{\{k_1,\dots,k_r:\, k_1+\dots+k_r=n\}} \binom{n}{k_1\, \dots\, k_r} x_1^{k_1} \cdots x_r^{k_r}$

β) $\binom{n}{k_1\, k_2\, \dots\, k_r} = \binom{n}{k_1} \times \binom{n-k_1}{k_2} \times \dots \times \binom{n-k_1-\dots-k_{r-2}}{k_{r-1}} \times \binom{n-k_1-\dots-k_{r-1}}{k_r}$

2η χρήση πολ. συντελεστή. Απαριθμεί σύνολο τρόπων με τους ένα σύνολο n στοιχείων διαμερίζεται σε r ομάδες των $k_1, \dots, k_r$ στοιχείων η καθεμια

Παράδειγμα 1ο

Πόσες διαφορετικές λέξεις μπορούν να σχηματιστούν από αναμετάθεση των γραμμάτων της λέξης ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ $\binom{10}{1\,1\,1\,2\,1\,1\,2\,1} = \frac{10!}{2!\,2!} = \dots$

Παράδειγμα 2ο

8 στρατιώτες πρέπει να τοποθετηθούν σε 4 φυλάκια. Πόσοι τρόποι τοποθέτησης υπάρχουν

α) Αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός σχετικά με τον αριθμό των στρατιωτών που θα τοποθετηθούν σε κάθε φυλάκιο

β) Αν σε κάθε φυλάκιο πρέπει να τοποθετηθούν 2 στρατιώτες;

α) 1ος -> 4 τρόποι
2ος -> 4 τρόποι
3ος -> 4 τρόποι
4ος -> 4 τρόποι
⋮
8ος -> 4 τρόποι

} με πολλ/κή αρχή 4^8

β) $\binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}$ τρόποι.